Espaces vectoriels

Un **espace vectoriel (E.V.)** est un ensemble V, donc les objets sont des **vecteurs**, pour lequel il est possible de définir deux opérations :

1. **Addition :** $\vec{v} + \vec{w} \in V, \ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$
2. **Multiplication scalaire** : $\lambda \cdot \vec{v} \in V, \ \forall \vec{v} \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, ces opérations doivent satisfaire les 8 propriétés EV :

EV 1 - Commutativité	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
EV 2 - Associativité 1	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
EV 3 - Associativité 2	$\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
EV 4 - Distributivité 1	$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
EV 5 - Distributivité 2	$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
EV 6 - Elément neutre pour $\cdot$	$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
EV 7 - Elément neutre pour $+$	$0_V + \vec{v} = \vec{v}$
EV 8 - Inverse pour $+$	$\vec{v} + (-\vec{v}) = 0_V$

Exemples d'espaces vectoriels

1. Espaces euclidiens : $\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \ : \ v_1, \ldots v_n \in \mathbb{R} \right\}, \quad 0_{\mathbb{R}^n} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. Matrices : $\mathcal{M}_{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \ : \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}, \quad O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

3. Polynômes : $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$
   Elément neutre : polynôme nul $p(t) = 0$.

4. Fonctions réelles : $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
   Elément neutre : fonction identiquement nulle $f(t) = 0$.

Définitions

Des notions vue dans $\mathbb{R}^n$ se transposent identiquement dans des espaces vectoriels abstraits :

Soit V un E.V. et une famille de vecteurs $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \in V$.

1. Un vecteur $\vec{v} \in V$ est une **combinaison linéaire (C.L.) de** $\{v_1, \dots v_k\}$ s'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots \lambda_k \vec{v}_k$.
2. On note **Span**$\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ l'ensemble des $C.L.$ de $\{v_1, \dots v_k\}$.
3. La famille $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ est **linéairement indépendante** ou **libre** si aucun des $\vec{v}_i$ est une C.L. des autres. Autrement, les vecteurs sont **liés**.

Théorème

Une famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V$ est linéairement indépendante si et seulement si

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = 0_V \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0, \ \forall 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit V un E.V. et $W \subset V$. On dit que W est un **sous-espace vectoriel (S.E.V.)** si pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

1. W est non-vide
2. **Stabilité de l'addition :** $\vec{v} + \vec{w} \in W$
3. **Stabilité de la multiplication :** $\lambda \cdot \vec{v} \in W$

Caractérisation simplifiée

W est un S.E.V. si et seulement si, pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

1'. **Elément neutre :** $0_V \in W$

2'. **Stabilité des combinaisons linéaires :** $\lambda \cdot \vec{v} + \vec{w} \in W$

Sous-espaces vectoriels

Exemples

$\{0_V\}$ est un SEV

Les 3 types de SEV de $V = \mathbb{R}^2$ sont

- $\{(0,0)\}$
- les droites passant par l'origine
- $\mathbb{R}^2$ lui-même

Les polynômes sont des SEV des fonctions réelles, et $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{P}_n \subset \mathbb{F}$.

Théorème

Soit V un E.V. et vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Alors $\text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est un S.E.V. de V.

On dit que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ **engendre** (ou est une **famille génératrice du**) SEV.

Applications linéaires

Definitions

Soient V, W deux espaces vectoriel. Une fonction $T : V \to W$ est une **application linéaire** si

$$T(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda T(\vec{v}) + \mu T(\vec{w}), \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $T(0_v) = 0_W$.

Le **noyau** de T est le sous-ensemble $\mathbf{Ker}(T) = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = 0_W\} \subset V$.

L' **image** de T est le sous-ensemble $\mathbf{Im}(T) = \{T(\vec{v}) \in W : \vec{v} \in V\} \subset W$.

T est **injectif·ve** si $T(\vec{v}) = T(\vec{w}) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{w}$.

T est **surjectif·ve** si $\forall \vec{b} \in W, \ \exists \vec{v} \in V$ tel que $T(\vec{v}) = \vec{b}$.

Applications linéaires

Théorème

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Alors

$$T \text{ injectif} \cdot \text{ve} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}.$$

$$T \text{ surjectif} \cdot \text{ve} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(T) = W.$$

Cas des applications matricielles

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et $A \in M_{m\times n}$ sa matrice canonique. Alors on note

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(T) = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}, \qquad \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A) = \{\vec{x} : A\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

L'image de A est engendré par les **colonnes linéairement indépendantes de A.**

Le noyau de A est engendré par les **solutions du système homogène** $A\vec{x} = \vec{0}$.

Bases d'un espace vectoriel

Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdot \vec{v}_n\}$ est une **base** de V si

1. $\mathcal{B}$ est libre / linéairement indépendante.
2. **Span**$\{\vec{v}_1, \cdot \vec{v}_n\} = V$ (famille génératrice).

Le nombre n de vecteurs dans la base est la **dimension de** V. $\underbrace{\text{On la note } \mathrm{Dim}(V) = n.}_{\text{Pas noté au tableau !}}$

Exemples - Bases canoniques

1. $\mathbb{R}^n : \mathcal{B}_{can} = \{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n\}, \quad \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$
2. $\mathbb{P}_n : \mathcal{B}_{can} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}, \quad \mathrm{Dim}(\mathbb{P}_n) = n + 1$
3. $\mathbb{M}_{m \times n} : \mathcal{B}_{can} = \{E_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$

   où E_{ij} est la matrice $m \times n$ avec un 1 dans la i-ème ligne et j-ème colonne.

Coordonnées

Théorème + définition

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_n\}$ une base de V. Alors pour tout $\vec{v} \in V$, il existe une **unique combinaison linéaire dans** $\mathcal{B}$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \in V \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

On appelle **coordonnées de** $\vec{v}$ **dans** $\mathcal{B}$ le vecteur $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.

Elles établissent un lien direct entre un EV de dimension n et $\mathbb{R}^n$!

Formule de l'inverse

Si $\vec{V} = \mathbb{R}^n$, alors

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_n \end{pmatrix}^{-1} \vec{v}.$$

Matrice de changement de base

Définition

Soient $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots \vec{c}_n\}$ deux bases de V. On appelle **matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$** la matrice $P_{\mathcal{CB}}$ telle que

$$[v]_{\mathcal{C}} \;=\; P_{\mathcal{CB}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Formule de l'inverse

$$P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \ldots & \vec{c}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_n \end{pmatrix} = (\mathcal{C})^{-1}(\mathcal{B})$$

Formules des coordonnées

$$P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} & \ldots & [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}$$

Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient $T : V \to W$ une application liéaire, et des bases $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_n\} \subset V$ et $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots \vec{c}_m\} \subset W$ On appelle **matrice (représentative) de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice M telle que

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} \;=\; M[\vec{v}]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Formules des coordonnées

$$M = \begin{pmatrix} [\vec{T}(b_1)]_{\mathcal{C}} & \ldots & [\vec{T}(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} = [T(\mathcal{B})]_{\mathcal{C}}$$

Dimension d'un EV

Théorème (généralités)

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de V avec n éléments. Alors

1. toute base de V contient aussi exactement n éléments ;
2. une famille de k éléments de V avec $k > n$ est nécessairement **liée** ;
3. si une famille de n élément est libre, alors elle forme une base de V ;
4. si une famille de n éléments engendre V, alors elle forme une base de V.

Théorème (sous-espaces vectoriels)

Soit V un espace vectoriel et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Alors

1. $\mathrm{Dim}(W) \leqslant \mathrm{Dim}(V)$ avec égalité si et seulement si $W = V$;
2. $\mathrm{Dim}(W) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W = \{0_V\}$;
3. Toute base de W peut être completée en une base de V.

Rang, noyau et image

Matrices

Soit une matrice $A \in M_{m\times n}$. Alors le **rang de** A est défini par

$$\mathrm{Rg}(A) \;=\; \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(A)) \;=\; \text{nombre de colonnes-pivots de } A.$$

Théorème du rang (matrices)

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(A)) \;=\; n - \mathrm{Rg}(A) \;=\; \text{nombre de colonnes } \textbf{pas} \text{ pivots de } A.$$

Equivalence

$A \in M_{n\times n}$ est inversible $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathrm{Rg}(A) = n$.

Rang, noyau et image

Application linéaire

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Alors le **rang de** T est défini par

$$\mathrm{Rg}(T) \;=\; \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(T)).$$

Théorème du rang (applications linéaires)

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T)) + \mathrm{Rg}(T) \;=\; \mathrm{Dim}(V).$$

Equivalence

- T surjective $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Im}(T) = W \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Rg}(T) = \mathrm{Dim}(W)$;
- T injective $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Rg}(T) = \mathrm{Dim}(V)$;
- T surjective $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Rg}(T) = \mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(W)$.